Varianta 026

Subiectul I

a) AB= $\sqrt{3}$

b) Înmulțind în membrul stâng obtin: $4-8i-3i+6i^2=a+bi \Leftrightarrow -2-11i=a+bi \Leftrightarrow a=-2$ si $b=-11$

c) Aria cerută este $\frac{36\sqrt{3}}{4}$

d) Conjugatul lui $z=-2i-3$ este $\overline{z}=2i-3$

e) Se obține soluția $\begin{cases} a=2 \\ b=-17 \end{cases}$

f) Aplicând teorema lui Pitagora obțin $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=13$

Subiectul II

1.

a) Determinantul este 70

b) Deoarece numai 1, 2 si 3 verfică relația obțin că probabilitatea cerută este $\frac{3}{5}$

c) $125^x-5=0 \Leftrightarrow 5^{3x}=5^1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

d) $x=5$

e) Câtul este x^3-1 iar restul este 2

2.

a) $f'(x)=-\frac{12}{x^{13}}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-12$

c) $x=0$ deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=+\infty$ si $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$

d) $\int_1^2 f(x)dx=(12x-\frac{x^{-11}}{11})\Big|_1^2=\frac{1}{11}(132-\frac{1}{2^{11}})$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}[(x^{12}+1)f(n)]=+\infty$

Subiectul III

a) $1=3^0\cdot 5^0; 3=3^1\cdot 5^0; 5=3^0\cdot 5^1; 9=3^2\cdot 5^0$

b) Presupun că $2\in A \Rightarrow (\exists) i,j\in \mathbf{N}$ cu $2=3^i\cdot 5^j$ fals căci membrul stâng e par iar membrul drept impar; Pentru 7 obțin $7=3^i\cdot 5^j$ cu $i,j\in \mathbf{N}$. Dacă $i,j\in\{0\}$ evident fals, iar pentru $i,j\in \mathbf{N}^*$ fals deoarece 7 nu e multiplu de 3(sau 5)

c) Pentru $n=0$ evident $1=\frac{1-a}{1-a}$; presupun $1+a+...+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ şi am

$1+a+...+a^n+a^{n+1}=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}+a^{n+1}=\frac{1-a^{n+2}}{1-a}$

d) Membrul stâng se scrie $\frac{1-\frac{1}{3^{k+1}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^{k+1}})<\frac{3}{2}$

e) Membrul stâng este $\frac{1-\frac{1}{5^{S+1}}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}(1-\frac{1}{5^{S+1}})<\frac{5}{4}$

f) Evident $A\cap\{1,2,3,...,20\}=\{1,3,5,9,15\}$; Răspuns 5

g) Folosind punctele d) si e) obțin că $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}<(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k})(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{5^k})<\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}=\frac{15}{8}$

Subiectul IV

a) $f'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}; g'(x)=\frac{1}{x+1}-1+x=\frac{x^2}{x+1}$

b) $f'(0)=0; g'(0)=0$

c) Fie $x\geq 0; f'(x)=\frac{-x}{x+1}\leq 0\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0,+\infty)$ şi

$f(x)\leq f(0)=0(\forall)x\geq 0;\ g'(x)=\frac{x^2}{x+1}\geq 0(\forall)x\geq 0\Rightarrow g$ este crescătoare pe $[0,+\infty)\Rightarrow g(x)\geq g(0)=0(\forall)x\geq 0$

d) Membrul stâng e suma a n termeni ai une progresii aritmetice cu primul termen 1 si rația 2, adică $\frac{(1+2n-1)n}{2}=n^2$

e) Pentru n=1 evident; presupun $1^2+3^2+...+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$ şi am

$1^2+2^2+...+(2n-1)^2+(2n+1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}+(2n+1)^2=\frac{(n+1)[4(n+1)^2-1]}{3}$

f) Ținând cont de d) si e) obțin că limita ceruta este $\lim_{x\to+\infty}\frac{3n^3}{n(4n^2-1)}=\frac{3}{4}$

g) Din c) am $g(x)\geq 0\Rightarrow \ln(x+1)\geq x-\frac{x^2}{2}\Rightarrow\int_0^1\ln(x+1)dx\geq(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6})\Big|_0^1=\frac{1}{3}$; şi tot din c)

am $f(x)\leq 0\Rightarrow \ln(x+1)\leq x\Rightarrow\int_0^1\ln(x+1)dx\leq\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$